Задание № 9 Несобственные интегралы

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

24.1 Определение и простейшие примеры несобственных интегралов по бесконечному промежутку

М24.1.1 Определение. Рассмотрим функцию , определенную на бесконечном промежутке  и интегрируемую на любом конечном промежутке . Если существует конечный предел

,

то говорят, что интеграл  *сходится*. В противном случае говорят, что этот интеграл *расходится.* Интеграл  называется *несобственным интегралом по бесконечному промежутку.*

Пример 1. 

М24.1.2 Пример 2. Определим, при каких значениях параметра сходится интеграл .

При  : интеграл расходится.

При  .

Если , то  и интеграл сходится, если же , то  и интеграл расходится.

Итак, интеграл  сходится тогда и только тогда, когда .

М24.1.3 Формула Ньютона-Лейбница Из определения несобственного интеграла по бесконечному промежутку следует формула Ньютона-Лейбница для такого интеграла:

,

где  - первообразная функции .

М24.1.4 Определение. Рассмотрим функцию , определенную на бесконечном промежутке  и интегрируемую на любом конечном промежутке . Если существует конечный предел

,

то говорят, что интеграл  *сходится*. В противном случае говорят, что этот интеграл *расходится*.

Интеграл также называется несобственным интегралом по бесконечному промежутку.

М24.1.5 Определение: Рассмотрим функцию , определенную на бесконечном промежутке  и интегрируемую на любом конечном промежутке . Если существует конечный предел

,

то говорят, что интеграл  *сходится*. В противном случае говорят, что этот интеграл *расходится*.

Интеграл также называется несобственным интегралом по бесконечному промежутку.

24.2 Свойства несобственных интегралов по бесконечному промежутку

М24.2.1 Теорема (свойства несобственного интеграла по бесконечному промежутку)

1. Если  и интеграл  сходится, то сходится и интеграл 
2. Если интеграл  сходится, то для любого числа С сходится и интеграл 
3. Если интегралы  и сходятся, то сходятся и интегралы  и 

24.3 Несобственные интегралы от положительных функций

Если подынтегральная функция положительна, то расходимость несобственного интеграла на бесконечном промежутке означает, что предел из определения М24.1.1 равен .

М24.3.1 Теорема (признак сравнения)

Если ,  и найдется число такое, что при  верно неравенство то из сходимости интеграла  следует сходимость интеграла  при условии, что функция  интегрируема на любом промежутке .

М24.3.2 Пример. Проверить, сходится ли интеграл 

*Решение:* Интеграл  сходится и при  имеет место . Значит, по признаку сравнения интеграл  сходится.

М24.3.3 Теорема (предельный признак сравнения) Если ,  и существует предел  , то:

1. из сходимости интеграла  следует сходимость интеграла  (при тоже);
2. из расходимости интеграла  следует расходимость интеграла .

24.5 Определение и простейшие примеры несобственных интегралов от функций с особыми точками

М24.5.1 Определение. Пусть функция  задана в промежутке и неограниченна в любой окрестности точки . Точка  в этом случае называется *особой точкой* и, если существует предел

,

то этот предел называется *несобственным интегралом* от функции  на промежутке . В случае, если указанный предел конечен, то говорят, что интеграл  *сходится*.

М44.5.2 Пример. .

М24.5.3 *Замечание 1.* Имеет место аналог формулы Ньютона-Лейбница:

.

М24.5.4 *Замечание 2.* 1) Можно рассматривать функцию  на промежутке  с особой точкой . В этом случае . 2) Можно рассматривать функцию  на промежутке  с особыми точками  и . В этом случае . 3) Может оказаться, что функция неограниченна не только на концах рассматриваемого промежутка, но и в некоторых внутренних точках . Тогда рассматривается объединение частичных интервалов  и интеграл на каждом из полученных частичных интервалов. Если на каждом из частичных интервалов несобственный интеграл сходится, то он сходится и на интервале , причем его значение равно сумме значений интеграла на частичных интервалах. Если хотя бы на одном частичном интервале интеграл расходится, то он расходится и на всем интервале . 4) можно рассматривать также функцию на бесконечном промежутке с особыми точками внутри этого промежутка.

М24.5.5 Пример. Исследуем сходимость интеграла  в зависимости от значения параметра .

*Решение.* При  имеем . При  степень переменной  отрицательна, значит, при возведении в степень  происходит деление на ноль и интеграл расходится. При  степень переменной  положительна, значит,  и интеграл сходится.

Если , то  интеграл расходится.

\

24.6 Признаки сходимости несобственных интегралов

М24.6.1 Теорема (признак сравнения)

Пусть функции  и  заданы в промежутке  и  является единственной особой точкой. Если ,  и найдется число такое, что при  верно неравенство то из сходимости интеграла  следует сходимость интеграла  при условии, что функция  интегрируема на любом промежутке .

М24.6.2 Теорема (предельный признак сравнения) Пусть функции  и  заданы в промежутке  и  является единственной особой точкой. Если ,  и существует предел  , то:

1. из сходимости интеграла  следует сходимость интеграла  (при тоже);
2. из расходимости интеграла  следует расходимость интеграла .

М24.6.3 Следствие (признак сравнения Коши) Если при  функция  является бесконечно большой порядка  по сравнению с функцией , то при  интеграл  сходится, а при  интеграл расходится (при условии, что  - единственная особая точка на промежутке .

М24.6.4 *Замечание.* Утверждения М24.6.1, М24,6.2 и М24.6.3 легко переносятся и на случай интервала  с единственной особой точкой .

М24.6.5 Необходимый признак сходимости. Для сходимости несобственного интеграла  с единственной особой точкой необходимо и достаточно, чтобы для   такое, что для ,  выполнялось неравенство

.

М24.6.6 Теорема (об абсолютной сходимости) Пусть функция  задана в промежутке  и  является единственной особой точкой. Если сходится интеграл , то сходится и интеграл .

М24.6.7 *Замечание.* Из сходимости  не следует сходимость .

М24.6.8 Определение. Если сходится интеграл , то интеграл  называется *абсолютно сходящимся* интегралом, а функция  *абсолютно интегрируемой*. Если интеграл  сходится, а интеграл  - нет, то интеграл  называется *условно сходящимся*.

М24.6.9 *Замечание.* Если функция  абсолютно интегрируема на , а функция  ограничена на этом же промежутке, то функция  абсолютно интегрируема на промежутке .

**Самостоятельная работа:**

14.6.1. Проверить сходимость несобственных интегралов, найдя первообразные: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) 

14.6.2. а) Определить при каких значениях параметра  сходится интеграл ; пользуясь выведенным признаком, проверить сходимость интегралов: б) ; в) ; г) ;

14.6.3. Определить, при каких значениях параметра  сходится интеграл ;

14.6.5. Пользуясь признаком сравнения, проверить сходимость интегралов: а) ; б) ; в) ; г)  ; д) ; е) ;

14.6.6. Проверить сходимость несобственных интегралов, найдя первообразные: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

14.6.7. а) Определить при каких значениях параметра  сходится интеграл ; пользуясь выведенным признаком, проверить сходимость интегралов: б) ; в) ; г) ;

14.6.9. Убедиться, что следующие интегралы являются несобственными и проверить их сходимость: а) ; б) ; в) ;

**Ответы:**

**14.6.1**.а) 2; б) ; в) ; г) ; д) ; е) расходится;

**14.6.2.** а) сходится при ; б) сходится; в) расходится; г) сходится;

**14.6.3.** сходится при  ;

**14.6.5.** Пользуясь признаком сравнения, проверить сходимость интегралов: а) сходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится ; д) сходится; е) сходится;

**14.6.6.** Проверить сходимость несобственных интегралов, найдя первообразные: а) сходится; б) расходится; в) сходится; г) сходится; д) расходится;

**14.6.7.** а) сходится при  ; б) расходится; в) сходится; г) расходится;

**14.6.9.** Убедиться, что следующие интегралы являются несобственными и проверить их сходимость: а) расходится; б) расходится; в) расходится;